



DOI: <https://doi.org/10.46296/yc.v4i7.0034>

OTRA MIRADA A LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES EN SERIE DE FOURIER

ANOTHER LOOK AT THE REPRESENTATION OF FOURIER SERIES FUNCTIONS

Rodríguez-Rodríguez Alberto¹; Valdés-Tamayo Pedro²; Pino-Tarragó Julio³; Domínguez-Gálvez Dunia⁴

¹Docente Universidad Estatal del Sur de Manabí UNESUM. Jipijapa, Ecuador.

²Docente Universidad Estatal del Sur de Manabí UNESUM. Jipijapa, Ecuador.

³Docente Universidad Estatal del Sur de Manabí UNESUM. Jipijapa, Ecuador.

⁴Docente Universidad Estatal del Sur de Manabí UNESUM. Jipijapa, Ecuador.

*Correo: albeto.rodriguez@unesum.edu.ec

Resumen

Aprender matemáticas, requiere de razonamiento, de desarrollo del pensamiento lógico, algorítmico y ordenado. Algunos estudiosos de estas ciencias duras la identifican como la ciencia que necesita de los patrones. Cuando se trabaja con sucesiones y series, se reconocen patrones, por eso es tan importante hacerlo desde una posición constructivista, involucrando al aprendiz en la construcción y reconstrucción de su propio aprendizaje, proporcionando la importancia que requieren las conexiones entre conocimientos ya adquiridos y los nuevos por aprender, demostrando la utilidad práctica y la significación social del contenido. En el estudio de series, en la práctica se presentan problemas cuyos modelos son funciones que no son continuas o son de una naturaleza que no permiten el uso de las series de potencias. En el análisis de funciones, esencialmente en la Ingeniería Civil, se ha profundizado en el estudio de funciones que pueden escribirse como una serie de potencias, en muchas ocasiones se obvian otras funciones que describen con frecuencia, fenómenos vivenciales, los cuales por su complejidad no son abordados. En consecuencia, esta investigación se enfoca a estudiar otro tipo de serie que permite representar una clase más amplia de funciones: la serie de Fourier, a partir de la aplicación de métodos tales como: inducción-deducción y análisis-síntesis, se analizan las principales definiciones, teoremas y sus demostraciones desde una mirada diferente a las tradicionales, métodos que provocaron una asimilación significativamente superior a etapas anteriores.

Palabras clave: convergente, derivada, función, gráfico.

Abstract

Learning mathematics requires reasoning, development of logical, algorithmic and ordered thinking. Some scholars of these hard sciences identify it as the science that needs patterns. When working with sequences and series, patterns are recognized, that is why it is so important to do it from a constructivist position, involving the learner in the construction and reconstruction of their own learning, providing the importance that the connections between acquired knowledge and new knowledge require for learning, demonstrating the practical utility and social significance of the content. In the study of series, in practice there are problems whose models are functions that are not continuous or are of a nature that do not allow the use of power series. That is why this research focuses on studying another type of series that allows representing a broader class of functions: the Fourier series, from the application of methods such as induction-deduction and analysis-synthesis, the main definitions, theorems and their proofs from a different perspective than the traditional ones, methods that caused a significantly higher assimilation to previous stages.

Keywords: convergent, derived, function, graphic.

Información del manuscrito:

Fecha de recepción: 01 de junio de 2020

Fecha de aceptación: 09 de julio de 2020

Fecha de publicación: 10 de julio de 2020

1. Introducción

Una de las condiciones que debe cumplirse para la representación de una función en series de potencias, es que la función tiene que ser infinitamente derivable en un conjunto D y esta condición implica que la función tiene que ser continua en D .

Como si las dos condiciones señaladas en el párrafo anterior no fueran lo suficientemente restrictivas para representar una función en series de potencias, en muchos casos la serie de potencias obtenida a partir de una función no converge a la función que la genera. Para que esto ocurra todas las derivadas de la función tienen que estar acotadas en D .

Sin embargo, en la práctica se presentan problemas cuyos modelos son funciones que no son continuas o son de una naturaleza que no permiten el uso de las series de potencias. Es por eso que esta investigación se enfoca a estudiar otro tipo de serie que permite representar una clase más amplia de funciones: la serie de Fourier.

El tema para su total comprensión se despliega desde la definición de la

serie de Fourier; las condiciones que tiene que cumplir una función para que se pueda representar en serie de Fourier; su representación gráfica; las condiciones que tiene que cumplir una función para que la serie de Fourier generada por ella sea convergente y a dónde converge la serie de Fourier generada por una función que cumple las condiciones de Dirichlet.

2. Desarrollo

La enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario, necesita de la contextualización del contenido a partir de profundizar en el desarrollo del pensamiento lógico, algorítmico y ordenado, se precisa de la utilización de modelos rigurosos que se desplieguen a partir de un orden secuencial, precisado los resultados de aprendizaje por los documentos normativos nacionales para las transformaciones de este subsistema, en el cual se declaran los fines y objetivos de las IES para la formación integral de los estudiantes y se considera que el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene como centro un estudiante activo, reflexivo crítico e independiente. (Reglamento del Régimen Académico, 2019).

2.1. Funciones periódicas y seccionalmente continuas.

Definición 1. Se dice que la función f es *periódica* si existe al menos un número real $T \neq 0$ tal que para $x \in \text{Dom } f$ se cumple que:

$$f(x+T) = f(x). \text{ (González, 1997) (1)}$$

Cualquier número T que cumpla la condición (1) se denomina *período* de la función f . El menor de todos los períodos se denomina *período principal*.

Ejemplo 1. Las funciones $y = \sin x$ y $y = \cos x$ son funciones periódicas de período $T = 2\pi$, pues se cumple que $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ y $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Una propiedad importante de las funciones periódicas es que es que su gráfico tiene la misma forma en cada intervalo de amplitud igual al período. Esto permite estudiar dichas funciones en uno de esos intervalos y los resultados transferirlos al resto del dominio.

Por ejemplo, la integral de una función periódica tiene el mismo valor en cualquier intervalo de amplitud igual al período, o sea, para todo número real c se cumple que:

$$\int_0^T f(x) dx = \int_c^{c+T} f(x) dx.$$

Por otro lado, se puede construir una función periódica repitiendo el gráfico en intervalos consecutivo de igual amplitud. (Andalucía, 2020)

Ejemplo 2. Grafique la función periódica de período $T = 4$ definida por $f(x) = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$.

Solución. Para trazar el gráfico de f hay que trasladar el arco de la parábola $f(x) = x^2$ ubicado en el intervalo $[-2; 2]$ hacia la derecha y hacia la izquierda en intervalos consecutivos de amplitud 4. Analíticamente,

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ (x+4)^2 & \text{para } -6 \leq x \leq -2 \\ x^2 & \text{para } -2 \leq x \leq 2 \\ (x-4)^2 & \text{para } 2 \leq x \leq 4 \\ \vdots \end{cases}$$

y su gráfico es el siguiente:

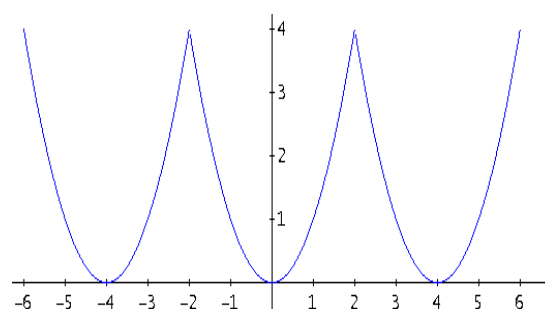


Ilustración 1. función periódica de período $T = 4$ definida por $f(x) = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$.

Fuente: Autores.

Definición 2. Se dice que una función es seccionalmente continua en el intervalo $[a, b]$, si f es continua en cada punto de $[a, b]$, excepto, quizás, en un número finito de puntos en los cuales presenta discontinuidad finita.

Ejemplo 3. Analice si la siguiente función es seccionalmente continua,

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ (x-4)^2 & \text{si } 3 < x < 5 \\ 6-x & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Solución. La función es continua en los intervalos $[0; 3]$, $(3; 5]$ y $[5; 6]$ pues en esos intervalos está definida por las expresiones $\log_3 x + 1$, $(x-4)^2$ y $6-x$, respectivamente, que son continuas. En los puntos $x=3$ y $x=5$ la función es discontinua, pero existen los límites laterales (Ilustración 2); por tanto, la discontinuidad es finita. En conclusión, la función dada es seccionalmente continua en el intervalo $[1; 6]$.

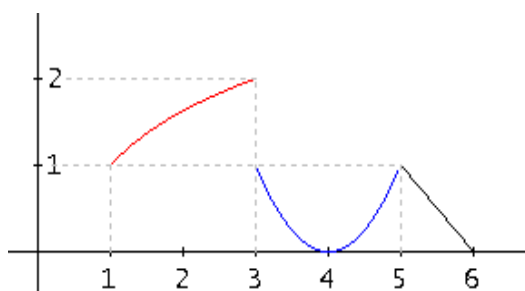


Ilustración 2. Gráfica resultada de ejemplo 3.
Fuente: Autores

Ejemplo 4. La función $y = 1/x$ no es seccionalmente continua en $[-2; 4]$ porque en $x = 0$ presenta discontinuidad infinita (Ilustración 3).

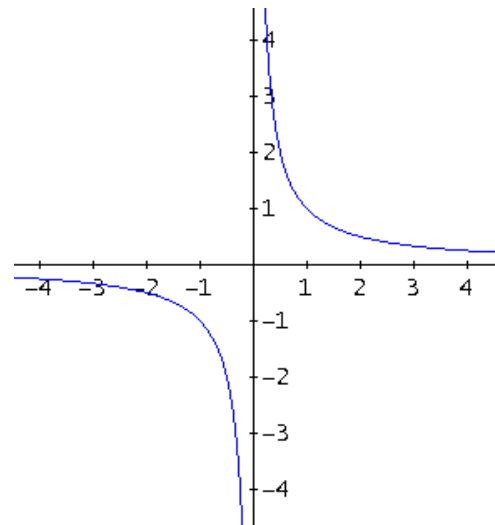


Ilustración 3. Gráfica resultada de ejemplo 4.
Fuente: Autores.

2.2. Series trigonométricas de Fourier.

Definición 1. Se llama *serie trigonométrica* a aquella de funciones que tiene la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

donde a_0, a_n y b_n con $n \in \mathbb{N}$ son números reales, denominados coeficientes de la serie.

Si la serie (1) converge en un punto x_0 , entonces converge también en el punto $x_0 + 2\pi$ porque las funciones $y = \cos nx$ y $y = \sin nx$ son



periódicas de período 2π . Por tanto, si a cada punto x donde la serie (1) es convergente se le asigna la suma de dicha serie, entonces se obtiene una función

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2)$$

que es periódica de período 2π .

Ahora bien:

- 1.- ¿En qué condiciones una función puede generar una serie de Fourier?
- 2.- ¿Cómo se hace dicha representación?
- 3.- ¿La serie converge a la función que la genera en cada uno de cada punto donde está definida?

Supongamos que la función f representada en la forma (2) es seccionalmente continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Supongamos además que la serie trigonométrica del miembro derecho es absolutamente convergente. Entonces dicha serie es integrable término a término y se cumple que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx) \quad (3)$$

Ahora bien:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2} [\pi - (-\pi)] = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} [\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

Porque la función $y = \sin nx$ es impar.

Sustituyendo estos resultados en (3) se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi,$$

de donde resulta que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (4)$$

Para hallar los coeficientes a_n se multiplica la ecuación (3) por $\cos nx$ y se integra término a término. Así se obtiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx. \quad (5)$$

Multiplicando la ecuación (3) por $\sin nx$ e integrando término a término se obtiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (6)$$

Las expresiones (4), (5) y (6) fueron obtenidas por primera vez por el matemático suizo Leonardo Euler (1707-1793). Años más tarde, y de manera independiente, fueron obtenidas por también por el ingeniero y matemático francés Joseph Fourier (1768-1830). Sin embargo, debido a los trabajos realizados por este último, a la serie (2) con los coeficientes (4), (5) y (5) se denomina *serie de Fourier*. Acabamos de demostrar el siguiente teorema. (Piskunov, 1980)

Teorema 1 (de Dirichlet). Sea f una función periódica de período 2π y seccionalmente continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces f genera una serie de Fourier y se escribe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7)$$

Si además, $f'(x)$ es seccionalmente continua en $[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier generada por f es convergente y se cumple

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } f \text{ es continua en } x_0 \\ \frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)] & \text{si } f \text{ es discontinua en } x_0 \end{cases} \quad (8)$$

donde $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Las premisas del teorema anterior se denominan *condiciones de Dirichlet*.

Ejemplo 1. Dada la función periódica de período 2π definida por $f(x) = x$ para $-\pi < x \leq \pi$:

- Trace el gráfico de f .
- Pruebe que f genera una serie de Fourier.
- Determine la serie de Fourier generada por f .
- Analice la convergencia de la serie de Fourier.
- Dibuje el gráfico de la función a la cual converge la serie obtenida.
- Determine la suma de la serie para $x = \pm\pi$, $x = \pi/2$ y $x = 5\pi/3$.

Solución

- El gráfico de la función es el que aparece en la figura siguiente.

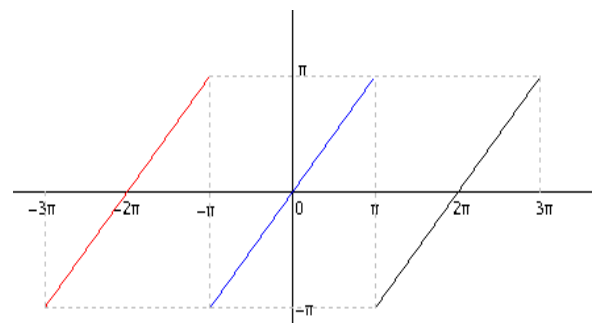


Ilustración 4. Gráfica resultada de ejemplo 1.
Fuente: Autores.



b) Hay que demostrar que f cumple las dos primeras condiciones de Dirichlet.

□ Según datos, la función es periódica de período 2π (Se cumple la primera condición).

□ La función f es continua] $[-\pi, \pi$ [porque en ese intervalo $f(x) = x$, que es una función continua. En $x = \pm\pi$ presenta discontinuidad finita, pues se cumple

$$f(-\pi^-) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} (x + 2\pi) = \pi$$

$$f(-\pi^+) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} x = -\pi,$$

$$f(\pi^-) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} x = \pi,$$

$$f(\pi^+) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x - 2\pi) = -\pi$$

Por tanto, f es seccionalmente continua en $[-\pi, \pi]$. (LQQD)

c) Determinemos los coeficientes de Fourier.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx$$

Haciendo:

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos nx dx & \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi \sin n\pi}{n} - \frac{-\pi \sin(-n\pi)}{n} - \left[-\frac{1}{n^2} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ 0 + \frac{1}{n^2} [\cos n\pi - \cos(-n\pi)] \right\} \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} [\cos n\pi - \cos n\pi] = 0. \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nx dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{-\pi \cos(-n\pi)}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -\frac{2\pi \cos n\pi}{n} + \frac{0-0}{n^2} \right\} \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(x) \sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (0 \cdot \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx$$

d) $f'(x) = 1$ para $x \neq (2k+1)\pi$ y no está definida para $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) pero los límites laterales en

estos puntos son iguales a 1 (Ilustración 5). Entonces, $f'(x)$ es seccionalmente continua en $[\square\square, \square]$. Por tanto, la serie obtenida es convergente y se cumple:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx = \begin{cases} x & \text{si } x \neq (2k+1)\pi, \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

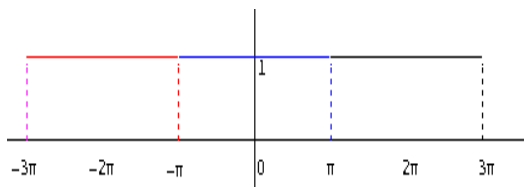


Ilustración 5. Límites laterales iguales a 1.

Fuente: Autores.

e) La función suma de la serie de Fourier obtenida es:

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq (2k+1)\pi \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y su gráfico es el que se muestra en la Ilustración 6.

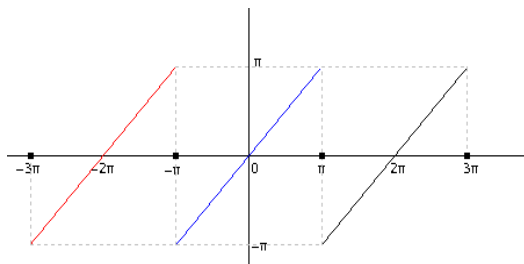


Ilustración 6. La función suma de la serie de Fourier.

Fuente: Autores.

$$\text{f) } S(\pm\pi) = 0, S(\pi/2) = \pi/2, \\ S(5\pi/3) = S(2\pi + \pi/3) = S(\pi/3) = \pi/3.$$

Como se puede observar en el ejemplo que acabamos de resolver, $a_0 = a_n = 0$ y la serie que se obtuvo

es una serie de senos. Esto no es una casualidad; se debe a que la función $f(x) = x$ con $-\pi < x < \pi$ es impar, pues se cumple:

Teorema 2. Sea f una función periódica de período 2π y seccionalmente continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

tal que si $f(x)$ es par, entonces

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{y} \quad b_n = 0, \quad (9)$$

y si $f(x)$ es impar, entonces

$$a_0 = a_n = 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (10)$$

2.3. Cambio de período.

Hasta ahora hemos obtenido la serie de Fourier de una función seccionalmente continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y periódica de período 2π ; sin embargo, en la resolución de muchos problemas de la ciencia y de la técnica se necesita obtener la serie de Fourier generada por una función periódica de período $T \neq 2\pi$. En este epígrafe vamos a



estudiar la forma de realizar el desarrollo de Fourier para tales funciones. Para eso comencemos con el siguiente ejemplo: (Rodríguez, 2018)

Ejemplo 1. Representar en series de Fourier, la función periódica de período 2π , definida por $f(x) = x$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Solución

a) Representemos la función f gráficamente.

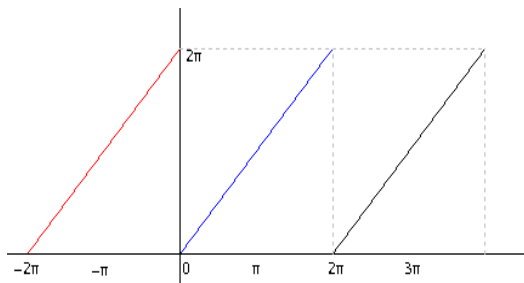


Ilustración 7. Gráfica de ejemplo 1.

Fuente: Autores.

b) Calculemos los coeficientes. Esta función, en $[-2\pi, \pi]$, está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Sin embargo, para $0 < x \leq 2\pi$ la función viene dada por $f(x) = x$, que es una expresión más cómoda. Por eso, para calcular los coeficientes de la serie de Fourier es conveniente usar el intervalo $[0, 2\pi]$ en lugar de $[-\pi, \pi]$. En efecto:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2 - 0}{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx.$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos nx dx & \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{2\pi} \right] = \frac{1}{\pi} [0] = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx.$$

Haciendo

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nx dx & \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} + 0 \right] = -\frac{2}{n}.$$

Por tanto,

$$f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \sin nx \right).$$

c) Analicemos la convergencia de la serie obtenida. La derivada de f es $f'(x) = 1$ para $x \neq 2k\pi$, que es seccionalmente continua en $[0, 2\pi]$. Por tanto, la serie es convergente para todo número real. La suma de la serie $S(x) = f(x) = x$ en los puntos donde la función es continua, o sea, en $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Donde la función es discontinua, o sea, en $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, la suma es $S(x) = \frac{1}{2} [f(2k\pi^-) + f(2k\pi^+)] = \frac{1}{2} [2\pi + 0] = \pi$. En resumen

$$f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \sin nx\right) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2k\pi \\ \pi & \text{si } x = 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

d) **Conclusión.**

$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n} \sin nx\right) \text{ para } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 1. Sea f una función periódica de período $T > 0$ y seccionalmente continua en el intervalo $[0; T]$. Entonces:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (1)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x dx, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x dx, \quad (4)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (5)$$

Ejemplo 4. Represente en serie de Fourier la función periódica de período $T = 2$ definida por $f(x) = |x|$ para $-1 \leq x < 1$.

Solución. En este ejemplo, $T = 2$ y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

a) Representemos la función gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Por tanto, el gráfico queda como sigue

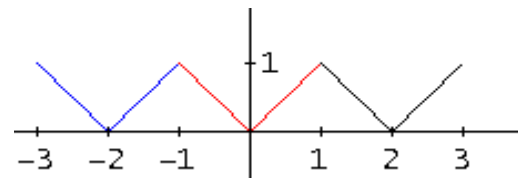


Ilustración 8. Gráfica de ejemplo 4.
Fuente: Autores.

b) Hallemos los coeficientes. Observe que f es continua en todo el eje real y como además es periódica, ella genera una serie de Fourier de la forma (1) con los coeficientes (3), (4) y (5).



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \int_{-1}^1 |x| dx$$

$$= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\pi x dx$$

$$= \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx.$$

(El integrando es par)

Haciendo

$$\begin{cases} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos n\pi x dx & \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{cases}$$

$$a_n = 2 \left[\frac{x \sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx \right]$$

$$= 2 \left[0 - \frac{1}{n^2 \pi^2} (-\cos n\pi x) \Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\pi x dx$$

$$= \int_{-1}^1 |x| \sin n\pi x dx = 0.$$

(El integrando es impar).

Por tanto,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos[(2n-1)\pi x]$$

c) La derivada de f es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{para } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < x < 1 \end{cases}, \text{ que es}$$

seccionalmente continua en el intervalo $[-1; 1]$. Por tanto, la serie converge para todo x real.

Como además f es continua, la serie converge a la función para todo número real, o sea,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos[(2n-1)\pi x] = |x|$$

d) **Conclusión.** Cualquiera que sea el número real x se cumple

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos[(2n-1)\pi x]$$

3. Materiales y métodos

Prevaleció en la construcción del presente trabajo la utilización de las vías inductiva y deductiva, con predominio de esta última como organización didáctica del sistema de conocimientos. Se utilizó la Prueba de Mc Nemar para muestras relacionadas que permite comparar los resultados utilizando los métodos de aprendizaje tradicionales y los contextualizados. Se realiza la utilización de procedimientos heurísticos para la resolución de problemas, aparecen de manera

implícita las exigencias para el aprendizaje desarrollador de la asignatura Matemática.

4. Discusión de los resultados

La prueba de Mc Nemar para muestras relacionadas, calculado a través del auxilio del programa estadístico profesional SPSS 11.5 para Windows, se aplicó a 45 estudiantes de la Universidad Estatal del Sur de Manabí, con el objetivo de determinar la efectividad de la estrategia didáctica aplicada con el despliegue concebido, el en cual predomina la construcción del aprendizaje por el estudiante.

Tabla 1. Tabla de contingencia para determinar el tipo de aprendizaje en los estudiantes objeto de estudio. (Prueba de Mc Nemar para muestras relacionadas)

		Tipo de aprendizaje		Total
		Tradicional	Contextualizado	
Tipo de aprendizaje	Tradicional	14	20	34
	Contextualizado	0	11	11
Total		14	31	45

$p < 0,05$ lo que corrobora la factibilidad de la propuesta.

Se evidenció que antes de la aplicación de la estrategia didáctica existía un bajo nivel de aprendizaje contextualizado en los estudiantes seleccionados como muestra, pero

luego de la aplicación se aumentó este nivel al 68,8%. La prueba de Mc Nemar para muestras relacionadas arrojó una probabilidad inferior a 0,05, lo que corrobora la efectividad de la propuesta.

Conclusiones

Los resultados obtenidos apuntan a que en la esencia de la interacción de la muestra con estas esferas de actuación se han producido transformaciones significativas. Según los resultados de la prueba de salida, es posible plantear que se encuentran evidencias que revelan un nivel adecuado del aprendizaje contextualizado de los estudiantes.

Se demostró la necesidad de profundizar en la aplicación de las operaciones de cálculo aritmético, algebraico y representación gráfica a distintas situaciones, sobre la base de una comprensión más profunda de los procedimientos que se emplean, así como de resolver problemas aritméticos de la vida práctica, de carácter económico-social y científico-ambiental, que se modelan mediante series.



Bibliografía

- Andalucía, J. d. (6 de julio de 2020).
<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18700232/helvia/sitio/upload/11.pdf>. Obtenido de _FUNCIONES_CONTINUAS:
<http://www.juntadeandalucia>
- González, G. (1997). Series de Fourier, Transformadas. Divulgaciones Matemáticas, v. 5, No. 1/2, 43–60.
- Piskunov, N. (1980). Cálculo diferencial e integral. Tomo II. Moscú: Editorial Mir. Moscú.
- (2019). Reglamento del Régimen Académico. QUITO: CES.
- Rodríguez, A. (2018). Cálculo Diferencial e Integral contextualizado a procesos vivenciales. Alcoy, Alicante: 3Ciencias.
- Ricardo, P. (2002). Cálculo Diferencial e Integral. Universidad de Granma.
- Samuelson, P. (2002). Economía. Decimoséptima Edición. Editorial McGraw-Hill. Madrid.
- Scheffe, M. (2002.) The theory of the foundation of mathematics. Technical report, Eindhoven University of Technology,
- Sydsaeter, K. & Hammond, J. (2003.). Matemáticas para el Análisis Económico. Volumen I. Editorial Félix Varela. La Habana.